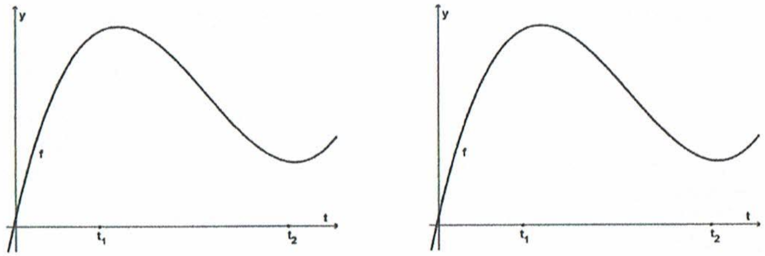
Q2 Set 2, Runde 1

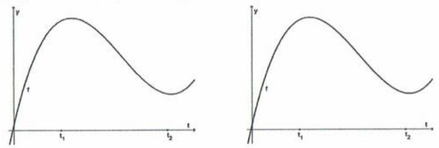
1	$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$
2	Schreiben Sie ohne Wurzelzeichen: $\sqrt[3]{z}$
3	Geben Sie jeweils die Gleichung der Funktion an sowie die Definitions- und Wertemenge: a) f ordnet dem Radius r eines Kreises seinen Umfang zu. b) Ein Rechteck hat den Flächeninhalt 10. Seine Länge sei die Zahl x. f ordnet der Länge des Rechtecks seine Breite zu.
4 Beispiel-aufgabe HKM	**Analysis Niveau 1** 1 Gegeben ist die Funktion f mit $f: t \mapsto f(t)$. Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. 1.1 Stellen Sie die Bedeutung der beiden Terme $f(t_1)-f(t_2)$ und $F(t_2)-F(t_1)$ jeweils durch geeignete Einzeichnungen an den abgebildeten Graphen von f dar.  **(3 BE)** 1.2 Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung der Terme $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ und $\pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} (f(t))^2\,dt$. **(2 BE)**

Lösung Q2 Set 2, Runde 1

<table>
<tr><td>1</td><td>$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Schreiben Sie ohne Wurzelzeichen: $\sqrt[3]{z}$</td><td>$z^{\frac{1}{3}}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Geben Sie jeweils die Gleichung der Funktion an sowie die Definitions- und Wertemenge:
a) f ordnet dem Radius r eines Kreises seinen Umfang zu.
b) Ein Rechteck hat den Flächeninhalt 10. Seine Länge sei die Zahl x. f ordnet der Länge des Rechtecks seine Breite zu.</td><td>a) $f(r) = 2\pi r, D = \mathbb{R}_{0,}^{+}\ W = \mathbb{R}_{0,}^{+}$

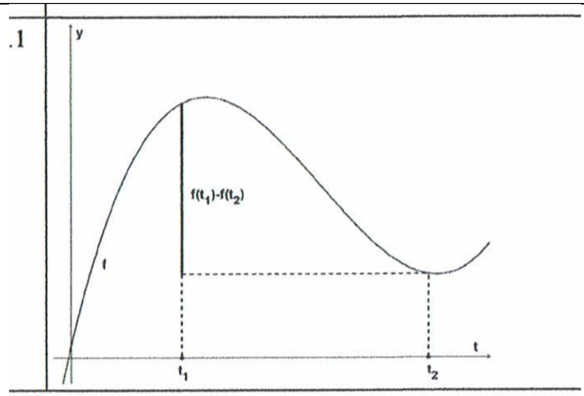
b) $f(x) = \frac{10}{x},\ D = \mathbb{R}^{+}/\{0\},\ W = \mathbb{R}^{+}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>**Analysis Niveau I**

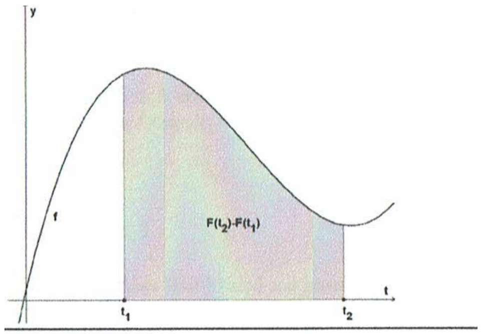
1 Gegeben ist die Funktion f mit $f: t \mapsto f(t)$. Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f.

1.1 Stellen Sie die Bedeutung der beiden Terme $f(t_1) - f(t_2)$ und $F(t_2) - F(t_1)$ jeweils durch geeignete Einzeichnungen an den abgebildeten Graphen von f dar.


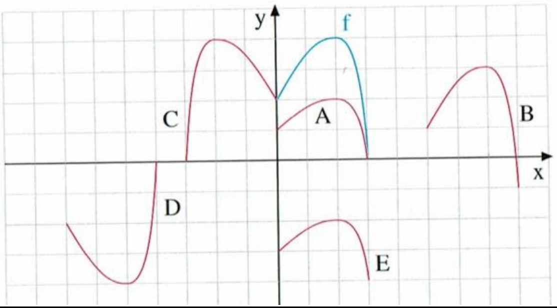
(3 BE)

1.2 Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung der Terme $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ und $\pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} (f(t))^2\, dt$.
(2 BE)

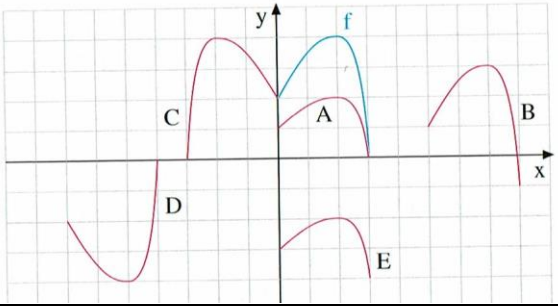
1.2 $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$: Der Term entspricht dem Wert der Sekantensteigung zwischen den Punkten $P_1(t_1 \mid f(t_1))$ und $P_2(t_2 \mid f(t_2))$.
$\pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} (f(t))^2\, dt$: Rotiert der Graph von f im Intervall von t_1 bis t_2 um die t-Achse, so entsteht ein Rotationkörper. Der Wert des Integrals entspricht dem Volumen des Körpers.</td><td>.1



</td></tr>
</table>

Q2 Set 2, Runde 2

1	Wandeln Sie $\frac{3}{8}$ in eine Dezimalzahl um.
2	Berechnen Sie: $\frac{5^4 \cdot 3}{15^2}$
3	**Übung 12** Ordnen Sie die Funktionsgleichungen und die Graphen einander zu. I. $y = 0{,}5\,f(x) - 4$ II. $y = 0{,}5\,f(x)$ III. $y = -f(x + 7)$ IV. $y = f(x - 5) - 1$ V. $y = f(-x)$ 
4 Erfolg im Mathe-Abi	Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat den Wendepunkt (0/0) und den Hochpunkt (2/2). Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.

Lösung Q2 Set 2, Runde 2

1	Wandeln Sie $\frac{3}{8}$ in eine Dezimalzahl um.	0,375
2	Berechnen Sie: $\frac{5^4 \cdot 3}{15^2}$	$\frac{25}{3}$
3	**Übung 12** Ordnen Sie die Funktionsgleichungen und die Graphen einander zu. I. $y = 0{,}5\,f(x) - 4$ II. $y = 0{,}5\,f(x)$ III. $y = -f(x+7)$ IV. $y = f(x-5) - 1$ V. $y = f(-x)$ 	I→ E, II → A, III → D, IV → B, V → C
4	Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat den Wendepunkt (0/0) und den Hochpunkt (2/2). Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.	$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x$ (ausführliche Lösung: Gruber/Neumann: Erfolg im Mathe-Abi, hilfsmittelfreier Teil, S. 64)

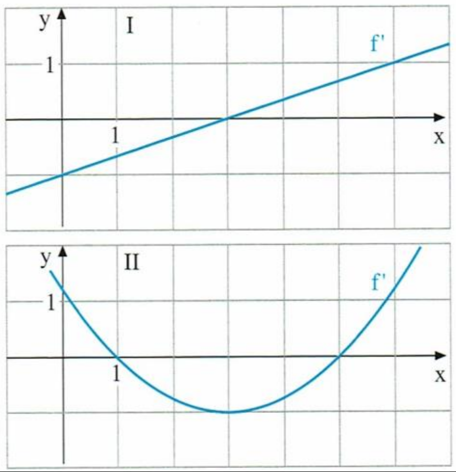
Q2 Set 2, Runde 3

1	Welche Zahl ist größer: $-\frac{2}{4}$ oder $-\frac{2}{5}$?
2	Fassen Sie zusammen: $2a^2 + 2 \cdot a - a^2 + a$
3	Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. a) Berechnen Sie die mittlere Steigung der Funktion auf dem Intervall [2;a] für a > 2. b) Wie muss der Parameter a > 2 gewählt werden, wenn die mittlere Änderungsrate der Funktion auf dem Intervall [2;a] den Wert 6 annehmen soll?
4 Erfolg im Mathe-Abi	Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = 4 - x^2$ und $g(x) = x^2 - 4$. Ihre Graphen seien K_f und K_g. a) Bestimmen Sie die Schnittstellen der beiden Graphen. b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche von K_f und K_g eingeschlossen wird.

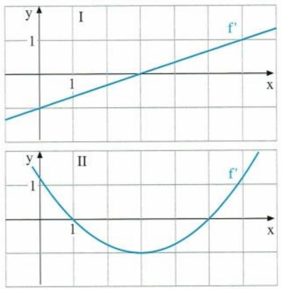
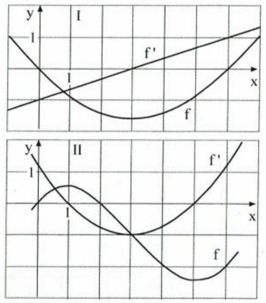
Lösung Q2 Set 2, Runde 3

1	Welche Zahl ist größer: $-\frac{2}{4}$ oder $-\frac{2}{5}$?	$-\frac{2}{5}$
2	Fassen Sie zusammen: $2a^2 + 2 \cdot a - a^2 + a$	$a^2 + 3a$
3	Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. a) Berechnen Sie die mittlere Steigung der Funktion auf dem Intervall [2;a] für a > 2. b) Wie muss der Parameter a > 2 gewählt werden, wenn die mittlere Änderungsrate der Funktion auf dem Intervall [2;a] den Wert 6 annehmen soll?	6. a) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{a^2-4}{a-2} = \frac{(a+2)(a-2)}{a-2} = a+2$ b) Ansatz: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 6$, $a+2=6$, $a=4$
4	Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = 4 - x^2$ und $g(x) = x^2 - 4$. Ihre Graphen seien K_f und K_g. a) Bestimmen Sie die Schnittstellen der beiden Graphen. b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche von K_f und K_g eingeschlossen wird.	Gleichsetzen liefert: $x_1 = 2, x_2 = -2$ $A = \int_{-2}^{2} ((4-x^2)-(x^2-4))dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x\right]_{-2}^{2} = \frac{64}{3}$ (ausführliche Lösung: Gruber/Neumann: Erfolg im Mathe-Abi, hilfsmittelfreier Teil, S. 63)

Q2 Set 2, Runde 4

1	Berechnen Sie: $\frac{12}{10} \div \frac{6}{25}$
2	Geben Sie den Wert für 0^0 an.
3	f liegen müssen. **3. Schluss von f′ auf f** Gegeben ist der Graph einer Ableitungsfunktion f′ (s. Bild I bzw. II). a) In welchen Bereichen verläuft f steigend, in welchen fallend? b) An welchen Stellen liegen Hochpunkte und Tiefpunkte von f? c) Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen von f, wenn angenommen wird, dass f durch den Ursprung geht. 
4 Erfolg im Mathe-Abi	Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x) - 2$. a) Beschreiben Sie, wie man den Graphen von g aus dem Graphen von f erhält. b) Bestimmen Sie die Nullstellen von g für $0 \le x \le 4$.

Lösung Q2 Set 2, Runde 4

1	Berechnen Sie: $\frac{12}{10} \div \frac{6}{25}$	5
2	Geben Sie den Wert für 0^0 an.	1
3	**3. Schluss von f' auf f** Gegeben ist der Graph einer Ableitungsfunktion f' (s. Bild I bzw. II). a) In welchen Bereichen verläuft f steigend, in welchen fallend? b) An welchen Stellen liegen Hochpunkte und Tiefpunkte von f? c) Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen von f, wenn angenommen wird, dass f durch den Ursprung geht.  c) c)  	3. I a) f ist fallend für x < 3 und steigend für x > 3. b) Der Tiefpunkt liegt bei x = 3. II a) f ist steigend für x < 1 f ist fallend für 1 < x < 5 f ist steigend für x > 5 b) Der Hochpunkt liegt bei x = 1. Der Tiefpunkt liegt bei x = 5.
4	Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x)=\cos(x)$ und $g(x)=2\cos(\frac{\pi}{2}x)-2$. a) Beschreiben Sie, wie man den Graphen von g aus dem Graphen von f erhält. b) Bestimmen Sie die Nullstellen von g für $0 \le x \le 4$. Nullstellen: $g(x)=0$ $2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-2=0$ $2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=2$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=1$ Die Substitution $\frac{\pi}{2}x=z$ führt zu $\cos z=1$ mit den Lösungen $z_1=0, z_2=2\pi, z_3=4\pi$, usw.. Die Resubstitution $\frac{\pi}{2}x=0$ führt zur Lösung $x_1=0$, die Resubstitution $\frac{\pi}{2}x=2\pi$ führt zur Lösung $x_2=4$. Alle weiteren Resubstitutionen führen zu Lösungen außerhalb des Intervalls $0 \leqslant x \leqslant 4$.	- Streckung von f mit dem Faktor 2 in y-Richtung - mit Faktor $\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung staucht (bzw. mit Faktor $\frac{2}{\pi}$ streckt) - und um 2 LE in negative y-Richtung verschiebt. Periode p von g ist: $p=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

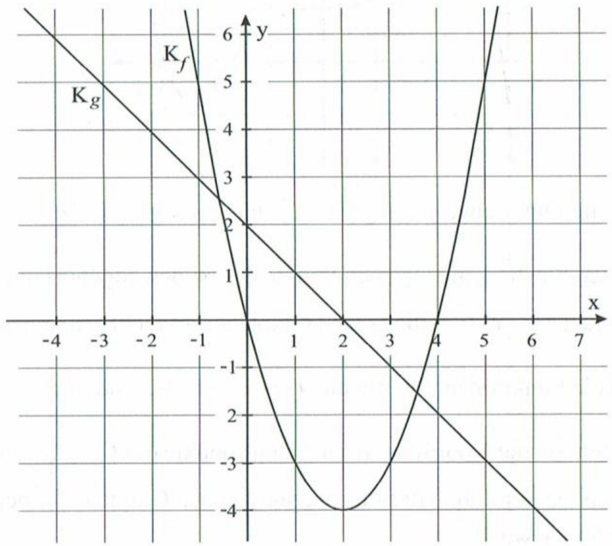
Q2 Set 2, Runde 5

1	Wandeln Sie 0,15 in einen Bruch um.
2	Berechnen Sie: $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{27}}$
3	An welchen Stellen hat f die Steigung m? a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x, m = 2$ b) $f(x) = 3\sqrt{x}, m = 3$
4 Erfolg im Mathe-Abi	Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = -e^{-x} + 2$. a) Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f entsteht. b) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von f und g im Punkt P(0/1) berühren.

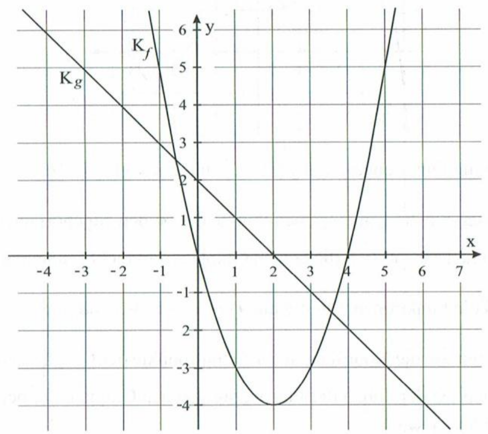
Lösung Q2 Set 2, Runde 5

1	Wandeln Sie 0,15 in einen Bruch um.	$\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$
2	Berechnen Sie: $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{27}}$	$\frac{5}{3}$
3	An welchen Stellen hat f die Steigung m? a) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-6x, m=2$ b) $f(x)=3\sqrt{x}, m=3$	a) x = 2 b) x = 1/4
4	Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x)=e^x$ und $g(x) = -e^{-x} + 2$. a) Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f entsteht. b) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von f und g im Punkt P(0/1) berühren.	Wegen $g(x)=-f(-x)+2$ entsteht der Graph von g durch Spiegelung von f an der x-Achse, durch Spiegelung an der y- Achse und Verschiebung um 2 LE in y-Richtung. b) Zeige $f(0)=g(0)=1$ und $f'(0)=g'(0)=1$

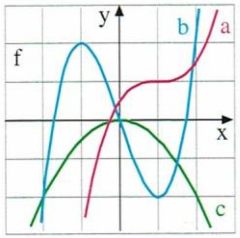
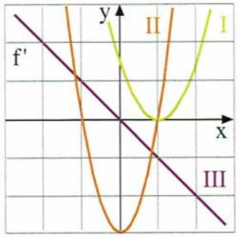
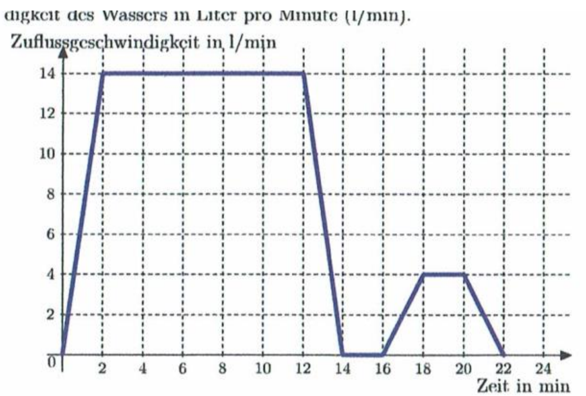
Q2 Set 2, Runde 6

1	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$
2	Ist die Gleichung $\sqrt{x^y} = (\sqrt{x})^y$ allgemein gültig?
3	An welcher Stelle verlaufen die Graphen von f und g parallel? a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2, g(x)=2x$ b) $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}, g(x)=\frac{1}{8}x+2$
4 **Erfolg im Mathe-Abi**	Die Abbildung zeigt die Graphen K_f und K_g zweier Funktionen f und g. a) Bestimmen Sie $f(g(3))$. Bestimmen Sie einen Wert für x, so dass $f(g(x))=0$ ist. b) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x)=f(x)\cdot g(x)$. Bestimmen Sie $h'(2)$. 

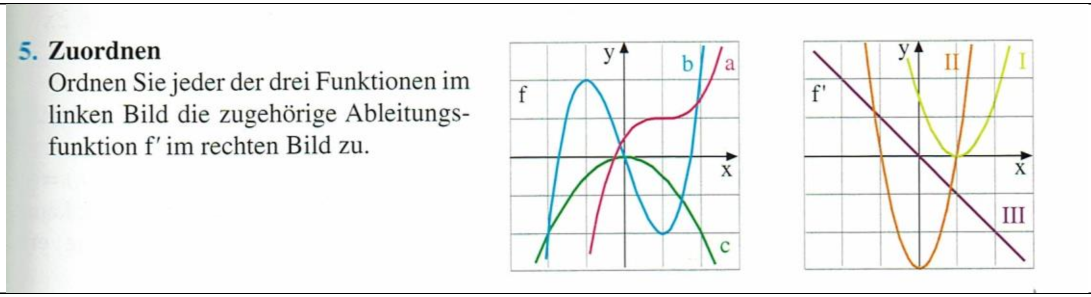
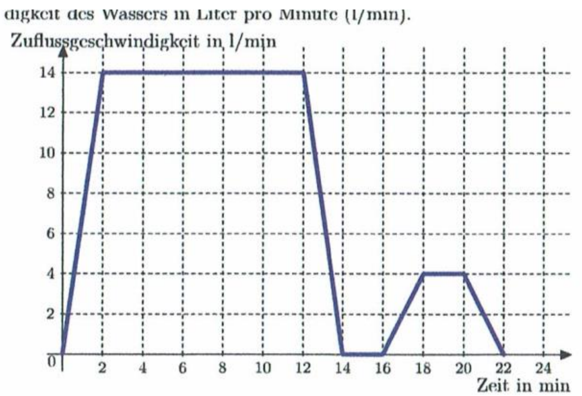
Lösung Q2 Set 2, Runde 6

1	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
2	Ist die Gleichung $\sqrt{x^y}=(\sqrt{x})^y$ allgemein gültig?	ja
3	An welcher Stelle verlaufen die Graphen von f und g parallel? a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2, g(x)=2x$ b) $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}, g(x)=\frac{1}{8}x+2$	a) x = 2 b) x = 4
4	Die Abbildung zeigt die Graphen K_f und K_g zweier Funktionen f und g. a) Bestimmen Sie $f(g(3))$. Bestimmen Sie einen Wert für x, so dass $f(g(x))=0$ ist. b) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x)=f(x)\cdot g(x)$. Bestimmen Sie $h'(2)$. 	Aus den Graphen lassen sich folgende Funktionswerte und Steigungen direkt ablesen: $f(-1)=5, f(0)=0, f(1)=-3, f(2)=-4, f(3)=-3, f(4)=0, f(5)=5$ Da der Graph von f bei $x=2$ einen Tiefpunkt hat, gilt $f'(2)=0$. Für den Graphen von g gilt: $g(-3)=5, g(-2)=4, g(-1)=3, g(0)=2, g(1)=1, g(2)=0, g(3))-1$ $g(4)=-2, g(5)=-3$ Es gilt außerdem für alle x-Werte: $g'(x)=-1$. Damit gilt: $f(g(3))=f(-1)=5$ Verwende die Nullstellen von f um $f(g(x))=0$ zu bestimmen. Mit $f(0)=0$ muss gelten: $g(x)=0\Rightarrow x=2$ und mit $f(4)=0$ muss gelten: $g(x)=4\Rightarrow x=-2$. b) Es gilt: $h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$. Einsetzen von $x=2$ liefert: $h'(2)=f'(2)\cdot g(2)+f(2)\cdot g'(2)=0\cdot 0+(-4)\cdot(-1)=4$.

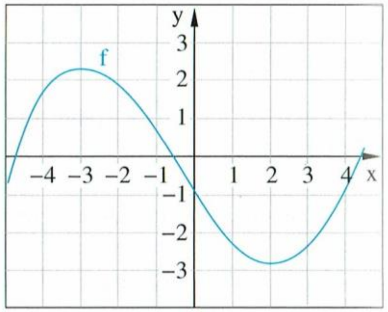
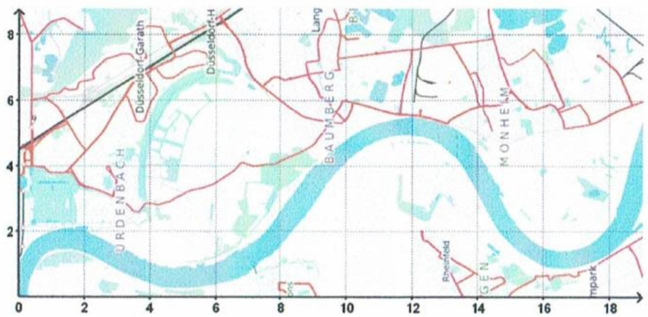
Q2 Set 2, Runde 7

1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{75}{76}\cdot\frac{76}{77}=$
2	Ist die Gleichung $\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$ wahr oder falsch?
3	**5. Zuordnen** Ordnen Sie jeder der drei Funktionen im linken Bild die zugehörige Ableitungsfunktion f′ im rechten Bild zu. 
4 **Bsp-Aufgaben NRW**	Ein Planschbecken wird mit Wasser gefüllt. Das Diagramm zeigt die Zuflussgeschwindigkeit des Wassers in Liter pro Minute (l/min). Zuflussgeschwindigkeit in l/min  1. Begründen Sie anhand der Zeichnung, in welchen Zeiträumen (für $0\le t\le 22$) die Wassermenge im Planschbecken zunimmt und wann die Wassermenge im Planschbecken unverändert bleibt. 2. Ermitteln Sie, wie viel Wasser nach 4 Minuten ins Becken geflossen ist und erklären Sie Ihr Vorgehen.

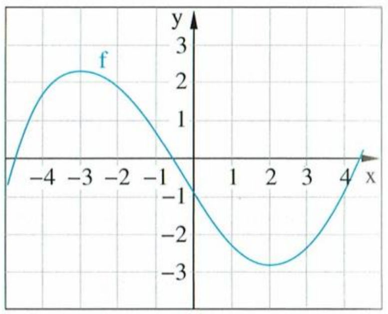
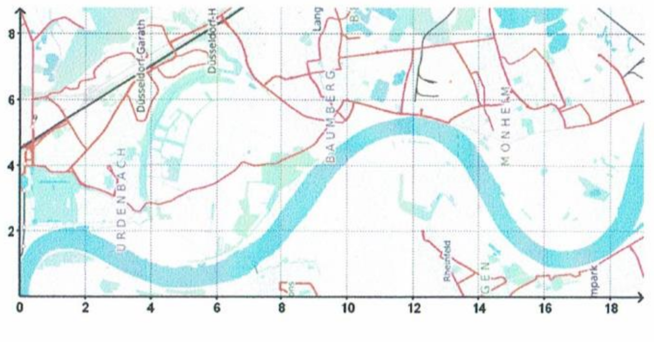
Lösung Q2 Set 2, Runde 7

1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{75}{76}\cdot\frac{76}{77}=$	$\frac{1}{77}$
2	Ist die Gleichung $\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$ wahr oder falsch?	wahr
3		a → I, b→ II, c → III
4	Ein Planschbecken wird mit Wasser gefüllt. Das Diagramm zeigt die Zuflussgeschwindigkeit des Wassers in Liter pro Minute (l/min). Zuflussgeschwindigkeit in l/min  1. Begründen Sie anhand der Zeichnung, in welchen Zeiträumen (für $0 \le t \le 22$) die Wassermenge im Planschbecken zunimmt und wann die Wassermenge im Planschbecken unverändert bleibt. 2. Ermitteln Sie, wie vielWasser nach 4 Minuten ins Becken geflossen ist und erklären Sie Ihr Vorgehen.	Der Wasserstand bleibt von der 14. bis zur 16. Minute unverändert, da die Zuflussgeschwindigkeit hier 0 ist. Im Zeitraum von 0 bis 14 und von 16 bis 22 steigt der Wasserstand aufgrund einer positiven Zuflussgeschwindigkeit. 2. Der gesuchte Wert entspricht der Fläche zwischen dem Funktionsgraph und der x-Achse im Intervall von 0 bis 4. Diese lässt sich z.B. durch Zerlegung in Teilflächen berechnen: 0.5 · 2 · 14 + 2 · 14 = 42 [l].

Q2 Set 2, Runde 8

1	$\frac{3}{7} \div 2$
2	Berechnen Sie: $\frac{49 \cdot 3^3}{7^3 \cdot 9}$
3	2. Betrachten Sie den abgebildeten Graphen von f im Intervall [−5; 5]. Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. a) $f'(x) > 0$ für $x < -3$. b) $f'(x) < 0$ für $[-1; 3]$. c) $f'(x)$ ist für $-3 < x < 2$ negativ. d) Für $x > 3$ ist f streng monoton steigend. e) $f'(2) = 0$ 
4 **Bsp-Aufgaben NRW**	Der Kartenausschnitt zeigt ein Stück des Rheins bei Düsseldorf. Der Flussverlauf soll durch den Graph einer Funktion f angenähert werden. Dazu kann man sich auf Grundlage der Abbildung überlegen, welche Eigenschaften die gesuchte Funktion f haben soll. Diese Eigenschaften sollen in drei Gleichungen formuliert werden: $f(\Delta) = \Delta,\quad f'(\Delta) = \Delta,\quad f''(\Delta) = \Delta$ Tragen Sie geeignete Zahlen in die sechs Kästchen ein und begründen Sie für jede der drei Gleichungen Ihre Eintragungen. 2. Wir nehmen an, dass der dargestellte Flussverlauf durch eine ganzrationale Funktion modelliert wird. Begründen Sie, welchen Grad diese Funktion mindestens haben  Abbildung 1: Rheinverlauf bei Düsseldorf

Lösung Q2 Set 2, Runde 8

1	$\frac{3}{7} \div 2$	$\frac{3}{14}$
2	Berechnen Sie: $\frac{49 \cdot 3^3}{7^3 \cdot 9}$	$\frac{3}{7}$
3	**2.** Betrachten Sie den abgebildeten Graphen von f im Intervall [–5; 5]. Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. a) $f'(x) > 0$ für $x < -3$. b) $f'(x) < 0$ für $[-1; 3]$. c) $f'(x)$ ist für $-3 < x < 2$ negativ. d) Für $x > 3$ ist f streng monoton steigend. e) $f'(2) = 0$ 	a) richtig, b) falsch, c) richtig, d) richtig, e) richtig
4	Der Kartenausschnitt zeigt ein Stück des Rheins bei Düsseldorf. Der Flussverlauf soll durch den Graph einer Funktion f angenähert werden. Dazu kann man sich auf Grundlage der Abbildung überlegen, welche Eigenschaften die gesuchte Funktion f haben soll. Diese Eigenschaften sollen in drei Gleichungen formuliert werden: $f(\Delta) = \Delta, \quad f'(\Delta) = \Delta,$ $f''(\Delta) = \Delta$ Tragen Sie geeignete Zahlen in die sechs Kästchen ein und begründen Sie für jede der drei Gleichungen Ihre Eintragungen.  Abbildung 1: Rheinverlauf bei Düsseldorf 2. Wir nehmen an, dass der dargestellte Flussverlauf durch eine ganzrationale Funktion modelliert wird. Begründen Sie, welchen Grad diese Funktion mindestens haben	Bei dieser Aufgabe sollen Ansätze der Modellierungskompetenz geprüft werden. Es geht nicht darum, Werte möglichst exakt abzulesen. Der Prüfling soll grundlegende Eigenschaften erfassen. Mögliche Lösungen sind: $f(8) = 2$, da der Graph in etwa durch den Punkt (8|2) verläuft. $f'(12) = 0$, da hier ein Extremum sein muss. $f''(8) = 0$, da hier der Graph in etwa einen Wendepunkt haben muss. 2. In der Abbildung sind 4 lokale Extrema erkennbar. Daher sollte es mindestens eine ganzrationale Funktion vom Grad 5 sein.